

9 Systeme von linearen Gleichungen

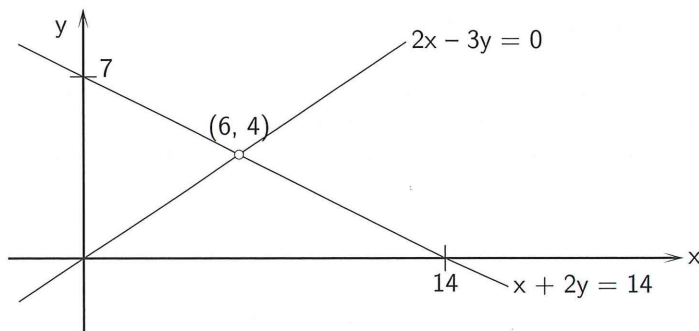
9.1 Systeme mit zwei Lösungsvariablen

Lösungsmengen von linearen Gleichungen mit zwei Lösungsvariablen

Unter einer Lösung einer Gleichung mit den Lösungsvariablen x, y verstehen wir ein Zahlenpaar (x -Wert, y -Wert), welches die Gleichung erfüllt.

Unter einer Lösung eines Systems von Gleichungen versteht man eine gemeinsame Lösung seiner Gleichungen.

Denkt man sich alle Lösungen der linearen Gleichung $ax + by = c$ im Koordinatensystem dargestellt, so ist der Graph immer eine Gerade, ausser wenn $a = b = 0$.



Zu 1, 2:

Bestimme alle Lösungen (x, y) , in denen sowohl x als auch y eine einstellige natürliche Zahl ist.

- 1 a) $2x + y = 9$ b) $8x - 3y = 45$ c) $6x + 7y = 84$
 2 a) $3x - 2y = 6$ b) $9x + 5y = 71$ c) $4x - 2y = 53$

Zu 3, 4:

Bestimme alle Lösungen (p, q) , in denen sowohl p als auch q eine Primzahl ist.

- 3 a) $3p + 2q = 43$ b) $7p - q = 70$ c) $p + q = 99$
 4 a) $p - q = 67$ b) $3p + 4q = 59$ c) $2p - 5q = 84$

Zu 5–10: Stelle die Lösungsmengen graphisch dar.

- 5 $a: y = \frac{3}{2}x - 6,$ $b: 3x - 2y = 12,$ $c: \frac{x}{4} - \frac{y}{6} = 1$
(im gleichen Koordinatensystem)
- 6 $a: y = -\frac{1}{3}x + 3,$ $b: x + 3y = 9,$ $c: \frac{x}{9} + \frac{y}{3} = 1$
(im gleichen Koordinatensystem)
- 7 a) $-6x + 10y = 45$ b) $3x - 4y = 5x - 6$ c) $2x + y = y + 8$
- 8 a) $4x + 5y + 20 = 0$ b) $x - y = -(4 - x)$ c) $x(y + 1) = y(x + 1)$
- 9 a) $y = 2x - 4$ b) $\frac{y}{x-3} = \frac{2x-4}{x-3}$ c) $y^2 = (2x - 4)^2$
d) $\sqrt{y} = \sqrt{2x - 4}$
- 10 a) $x + y = 4$ b) $(x + y)(x - y) = 4(x - y)$ c) $|x + y| = 4$
d) $|x| + |y| = 4$

Zu 11–16: Löse mit Hilfe einer graphischen Darstellung.
(Untereinander stehende Gleichungen sind im gegebenen Zusammenhang als System zu interpretieren.)

- 11 a) $y = -2x + 1$ $y = x - 5$ b) $y = x - 6$ $y = 7 - x$ c) $y = 3x + 2$ $y = 5x + 8$
- 12 a) $x + y = 9$ $x - y = 5$ b) $3x + 2y = 0$ $4x + y = 10$ c) $x + 2y = 4$ $2x - y = 8$
- 13 a) $3x + 2y - 2 = 0$ $x - 2y + 6 = 0$ b) $6x - 3y - 39 = 0$ $3x + 4y - 3 = 0$ c) $5x - 2y = 0$ $4x + 3y = 0$
- 14 Wie viele Lösungen hat das System?
a) $y = x + 2$ $y = x - 2$ b) $2x - 4y = 3$ $2y + 1.5 = x$ c) $9x - 4y = 12$ $11x - 5y = 0$
- 15 a) $x + 2y = 4$ $x - y = -11$ $3x + y = 7$ b) $x - y = 4$ $x + y = 4$ $y - x = 4$ c) $3x + 2y = 8$ $x + y = 1$ $4x + 3y = 9$
- 16 a) $y = 3x + 2y + 4 = x$ b) $x - 2 = y - 3 = 4 - x$

Ein System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Lösungsvariablen hat *im Normalfall genau eine Lösung*; in jedem andern Fall (d.h. in jedem Sonderfall) hat es entweder keine Lösung oder unendlich viele.

Zwei Gleichungen mit zwei Lösungsvariablen: algebraische Auflösung

Zu 17–26: Löse mit dem Einsetzungsverfahren.
(Sonderfälle kommen nur in Nr. 22 vor.)

- | | | | |
|----|---------------------------------------|--|--|
| 17 | a) $6x - 7y = 88$
$x = 24$ | b) $x + 3y = 3$
$y = 3x$ | c) $6x + 5y = 65$
$5x + 6 = 56$ |
| 18 | a) $4x - 9y = 0$
$5y = 40$ | b) $3x - 2y = 10$
$x = \frac{3}{4}y$ | c) $8x + 11y = 12$
$4x = -5y$ |
| 19 | a) $5x - 7y + 9 = 0$
$x + y = 0$ | b) $4x + 3y = 11$
$x - 2y = 0$ | c) $15x + 4y = 18$
$6x + y = 0$ |
| 20 | a) $3x + 4y = 16$
$y = 2 - x$ | b) $x - 2y = 9$
$x = 3y + 5$ | c) $6x + 5y = 4$
$x = \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}$ |
| 21 | a) $-x + 6y = 11$
$x = 2y - 3$ | b) $9x + y = 2$
$-y = 8x + 1$ | c) $3x - 4y = 9$
$2x = 4y + 2$ |
| 22 | a) $x - 5y = 7$
$x = 5y + 7$ | b) $x - 5y = 7$
$x = 6 + 5y$ | c) $x - 5y = 7$
$x = 7 + 3y$ |
| 23 | a) $8x + 15y = 39$
$15y = 2x + 9$ | b) $9(x - y) + 24x = 100$
$3(x - y) = 32$ | |
| 24 | a) $22x - 9y = 26$
$11x = 4y + 14$ | b) $6(x + y) - 41x = 10$
$\frac{x + y}{2} = 3x$ | |
| 25 | a) $x = 10y - 27$
$x = 4y + 27$ | b) $y = 0.3x - 2$
$y = 0.6 - x$ | c) $x + y = 4x + 5$
$x + y = 7x - 10$ |
| 26 | a) $y = 3x - 11$
$y = 13 - 5x$ | b) $5x = 1 - 3y$
$5x = 3y + \frac{1}{4}$ | c) $3x + 2y = 4 - 3y$
$3x + 2y = 14 - 5y$ |

Zu 27, 28: Beispiele zum Einsetzen mit nicht linearen Gleichungen.

27	a) $3xy - 2y^2 = 4$ $2y - 1 = 0$	b) $2x + 3 = 8 - x$ $x + y = xy$	c) $\frac{(x+y)^2}{x} = 75$ $\frac{x}{x+y} = 60$
28	a) $\frac{r-4}{2r-4} = \frac{1}{3}$ $r(3r-2s) = 80$	b) $\sqrt{u^2 - v^2} = 24$ $v + 18 = 0$	c) $wz - z^2 = 6$ $w - z = 1.5$

Zu 29–42: Löse mit dem Additionsverfahren.
(Sonderfälle kommen nur in Nr. 35 vor.)

29	a) $x + y = 26$ $x - y = 8$	b) $-x + 5y = 4$ $x - 2y = 5$	c) $4x - 7y + 34 = 0$ $2x + 7y - 4 = 0$
30	a) $x + 4y = 8$ $x + 3y = 4$	b) $8x - 7y = 38$ $3x - 7y = 23$	c) $5x + 2y = 19$ $5x - 3y = -16$
31	a) $9x - 2y = 4$ $11x + y = 29$	b) $4x + 9y = 15$ $2x - 7y = 19$	c) $4x - y - 12 = 0$ $x - 3y + 8 = 0$
32	a) $3x + 4y = 24$ $-x + 5y = 11$	b) $8x + 5y = 7$ $4x + 3y = 1$	c) $25x + 12y = 5$ $11x + 6y = 13$
33	a) $8x - 7y = 1$ $-2x + 3y = 11$	b) $9x + 5y = 2$ $12x + 7y = 4$	c) $4x + 5y + 6 = 0$ $5x + 6y + 7 = 0$
34	a) $2x + 3y = 3$ $3x + 8y = 22$	b) $7x - 8y = 22$ $5x + 12y = -2$	c) $9x + 7y = 8$ $15x + 11y = 13$
35	a) $5x + 6y = 3$ $7x - 8y = -4$	b) $-4x + 6y = 5$ $6x - 9y = -8$	c) $-4x + 6y = 5$ $6x - 9y = -7.5$
36	a) $28u - 23v = 13$ $21u + 8v = -66$	b) $9u - 8v = 80$ $11u - 12v = 100$	c) $15u - 25v = 13$ $14u + 20v = 13$
37	a) $14s + 15t + 10 = 0$ $21s + 10t + 65 = 0$	b) $11s - 75t = 0$ $9s - 100t = 0$	c) $3s + 26t = 100$ $10s - 39t = 82$
38	a) $31y + 28z = 120$ $27y - 49z = 115$	b) $45y - 61z = 37$ $54y - 16z = 73$	c) $18y + 25z = 26$ $13y + 18z = 19$
39	a) $8x + 3y = 5.7$ $3x - 2y = 6.2$	b) $1.5x - 1.4y = 5$ $2x + 2.8y = 30$	c) $2.25x - 7y = 1$ $0.75x - 2y = 0.5$

- 40 a) $4x - 3y = 1\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{2}x - \frac{2}{3}y = 6$ c) $\frac{x}{3} + y = \frac{7}{8}$
 $12x - 10y = -1\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}y = 8$ $\frac{x}{6} + \frac{y}{5} = \frac{1}{4}$
- 41 a) $x + y = \sqrt{2}$ b) $x\sqrt{3} + y\sqrt{2} = 4$ c) $x\sqrt{2} - y = \sqrt{2}$
 $3x + 2y = \sqrt{3}$ $x\sqrt{3} - y\sqrt{2} = 2$ $x + y = 2$
- 42 a) $x\sqrt{2} + y = \sqrt{6}$ b) $x\sqrt{3} + 2y = \sqrt{2}$ c) $x\sqrt{3} + 0.2y = \frac{1}{2}$
 $x - y\sqrt{3} = 2\sqrt{2}$ $3x + y\sqrt{2} = 6$ $-x\sqrt{3} + \frac{1}{2}y = 0.2$

Zu 43–52: Wähle selbst einen Lösungsweg.
(Ein Sonderfall kommt nur in Nr. 48 vor.)

- 43 a) $4y - 19 = y + 20$ b) $20x - 50 = 29y$ c) $3x + 50 = 6x + 5y$
 $5x + 2y = 126$ $2x + 5y = 8y$ $2y + 10 = 3x + 2y$
- 44 a) $x = 8y - 6$ b) $y = 2x - 3y + 4$ c) $y = 2x - 3y + 4$
 $x = 3y + 4$ $x = 2x - 3y + 4$ $x = 2x - 3y + 5$
- 45 a) $x = 5x - 7y + 9 = y$ b) $4x - 7 = 8 - x = 2x + 5y$
- 46 a) $2x - 5y - 39 = 0 = x + 3y + 8$ b) $8(x - 3y) = 0 = 9(5x - 7y + 4)$
- 47 a) $3(2y + 3) = 2x + 7y$ b) $(x + 5)(y - 2) = (x + 2)(y - 1)$
 $4(x + 2) = 5x - 3y$ $(x - 4)(y + 7) = (x - 3)(y + 4)$
- 48 a) $(x - 8)(y - 5) = (x - 9)(y - 4)$ b) $(x + 3)(y + 6) = (x + 6)(y + 4)$
 $(x - 8)(y - 5) = (x - 9)y - 4$ $(x - 9)(y - 8) = (x - 15)(y - 4)$
- 49 a) $1.3x + 1.2y = 6.2$ b) $\frac{1}{4}x - \frac{5}{6}y = 5$ c) $2x + 3y = 6$
 $1.7x + 0.8y = 5.8$ $\frac{4}{5}x - y = 11$ $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = \frac{1}{6}$
- 50 a) $\frac{25x - 3}{12} - \frac{20y - 1}{18} = 2x - y$ b) $\frac{x + 11y}{5} - \frac{9(y + 2)}{4} = \frac{1}{2}$
 $\frac{x + 4}{9} = \frac{y + 3}{5}$ $\frac{x}{20} + \frac{5}{6} = \frac{x}{15} + \frac{y}{10}$
- 51 a) $\frac{x + y}{2} + \frac{4y}{3} = 10$ b) $\frac{7(x - y)}{11} + \frac{x}{4} = 4.8$
 $5 - y = \frac{x + y}{2}$ $\frac{7(x - y)}{11} - \frac{3x}{4} = 2.4$

52 a) $16x + 17y = 99$ b) $18x + 23y = 100$ c) $19x + 91y = 1991$
 $17x + 16y = 99$ $17x + 22y = 100$ $91x + 19y = 1991$

Systeme mit Parametern

Kommen neben den Lösungsvariablen andere Variablen vor, so heissen diese Parameter. Wenn aus dem Aufgabentext nichts anderes hervorgeht, sind die Lösungsvariablen mit x, y bezeichnet.

Zu 53, 54: Löse das System mit Diskussion der Sonderfälle. Für die in Klammern angegebenen Parameterwerte ist das System auch graphisch zu lösen.

53 a) $y = 2x$ b) $y = x - 4$
 $x + y = 6a$ ($a = -1, 0, 1, 2$) $y = bx$ ($b = \frac{1}{3}, 1, 3$)

54 a) $cx + y = 0$ b) $x + dy = 6$
 $x - y = 4c + 4$ ($c = -1, 0, 1, 2$) $dx + y = 6$ ($d = -2, -1, 0, 1, 2$)

Zu 55–68: Löse das System unter Annahme des Normalfalles.

55 a) $ax + by = c$ b) $x = ay + b$ c) $sx - x = 1 - s$
 $y = mx$ $x = a + by$ $x + y = s$

56 a) $ax = by$ b) $mx + cy = a + b$ c) $x - y = d$
 $a(x + y) = c$ $mx = (a - c)y$ $\frac{x - y}{2} + dx = d$

57 a) $ax + y = b$ b) $x - cy = 1$ c) $ax - by = ab$
 $bx - y = c$ $x + y = c^2$ $cx - by = bc$

58 a) $(a - b)x + (a + b)y = 2a$ b) $(a + b)x + ay = a^2$
 $(a - b)x - (a + b)y = 2b$ $(a + b)x + by = b^2$

59 $4u - v - 2w = 0$ a) $u, v = ?$ b) $u, w = ?$ c) $v, w = ?$
 $u - v + 4w = 0$

60 a) $ax + y = 1$ b) $ax - by = a^2 + b^2$ c) $ax + by = 2a$
 $x + by = 1$ $bx + ay = a^2 + b^2$ $a^2x + b^2y = a^2 + b^2$

- 61** a) $ax + by = 0 = cx + dy$ b) $ax + by = c = bx + ay$
- 62** a) $(p+1)x - p^2y = p+1$
 $(p-1)x + py = p^2 + p$ b) $(t-1)x - t^2y = t-1$
 $(t+1)x - 2ty = t^2 + 3$
- 63** a) $(a-b)x + ay = a+b$
 $ax + (a+b)y = a+2b$ b) $(n+1)x + (n-1)y = 2n$
 $(n-1)x + (n+1)y = -2n$
- 64** a) $ax + bx + cy = c$
 $ax + by + cy = -a$ b) $x + y = ax + by$
 $x + y = a - b$
- 65** a) $(x+a)(y+2) = (x+3a)y$
 $4(x+a) = a(y+6)$ b) $(x+a)(y+b) = (x+a)y + b$
 $(x+y)(a+b) = (x+y)a + b$
- 66** a) $(a+b)x + (a-b)y = 2b^2$
 $(x+y)a - by = ab$ b) $x = b(2x + y + 1)$
 $y = 2(x + 2y + 2b)$
- 67** a) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = c + d$ b) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = c$ c) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = a$
 $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = c - d$ $\frac{x}{a} - y = d$ $x + y = b^2$
- 68** a) $\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 1$ b) $x - y = 4$
 $\frac{x}{a-b} + \frac{y}{a+b} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ $\frac{x}{2a-b} + \frac{y}{a-2b} = \frac{1}{2b-a}$
- 69*** $2x + 3y + 4 = 0$ $15x + 16y + 17 = 0$ $x + 3y + 5 = 0$
 $5x + 6y + 7 = 0$ $9x + 10y + 11 = 0$ $9x + 11y + 13 = 0$
a) Löse die drei Gleichungssysteme.
b) Verallgemeinerung? (Erfinde ein System mit Parametern, das möglichst gut zu den drei Beispielen passt, und löse es ohne Diskussion von Sonderfällen.)

Zu 70, 71: Löse das System mit Diskussion der Sonderfälle.

- 70** a) $x + ay = a^2$
 $x + 2y = 4$ b) $bx + 3y = 1$
 $x + y = b$ c) $y = 2x + 3$
 $y = mx + q$
- 71** a) $(c-6)x - y = 0$
 $cx + y = 2$ b) $-8x + 6y = 5$
 $12x - 9y = r$ c) $px + y = 0$
 $x - py = 0$

- 72 Für das allgemeine System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Lösungsvariablen $a_1x + b_1y = c_1 \wedge a_2x + b_2y = c_2$ gilt:
 $a_1b_2 \neq a_2b_1 \Rightarrow$ es hat genau eine Lösung (Normalfall), nämlich:

$$(x, y) = \left(\frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \right);$$

$a_1b_2 = a_2b_1 \Rightarrow$ es hat keine Lösung oder unendlich viele (Sonderfälle).

Löse mit Hilfe dieses Resultates z. B. die Systeme von Nummer 33.

- 73 Bestimme (z. B. mit Hilfe der Bedingung $a_1b_2 = a_2b_1$ aus Nr. 72) die Parameterwerte, für welche ein Sonderfall vorliegt. Gibt es für diese Werte unendlich viele Lösungen oder keine?

a) $4x + 6y = 3$ b) $4x + 6y = 3$ c) $4x + 6y = 3$
 $8x + ay = 6$ $bx - 2y = 1$ $6x + 9y = c$
d) $2x + py = 8$ e) $(q + 2)x + y = q$ f) $rx + (r - 1)y = r$
 $px + 8y = p^2$ $qx + 3y = 1$ $(r + 2)x + ry = r^2$

- 74 Definition der *Determinante*¹ von vier quadratisch angeordneten Zahlen:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

a) $\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = ?$ b) $\begin{vmatrix} -10 & 20 \\ -30 & -40 \end{vmatrix} = ?$ c) $\begin{vmatrix} 1.8 & -2.7 \\ -2.4 & 3.6 \end{vmatrix} = ?$

- d) Notiere die in Nr. 72 angegebene Auflösung des allgemeinen Systems (2 Gleichungen, 2 Lösungsvariablen) mit Hilfe von Determinanten.

Systeme, die auf Systeme von linearen Gleichungen führen

- 75 a) $\frac{x}{x-2} - \frac{4}{y} = 1$ b) $\frac{1}{y+1} + \frac{1}{y-1} = \frac{10-x}{y^2-1}$
 $\frac{x}{2+\frac{1}{y}} = \frac{y}{3-\frac{1}{x}}$ $\frac{1}{x-2} + \frac{3}{y-4} = \frac{5}{2-x}$
76 a) $\frac{1}{2x-3y} + \frac{1}{3x-2y} = \frac{1}{3y-2x}$ b) $\frac{3}{x^2+xy} + \frac{5}{xy+y^2} = \frac{7}{xy}$
 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{xy}$ $\frac{x}{x+3} + \frac{y}{y-3} = 2$
77 a) $(x+1):(y+2) = (x+3):(y+4)$ b) $(x+30):(x+15) = (y+1):(y-2)$
 $(x-y):(x+y) = 5:6$ $(x-17):(y-3) = (x+7):(y-9)$

¹ Lat. determinare "bestimmen".

- 78 a) $(x+10) : (x+y) : (y+10) = 3 : 5 : 7$
 b) $(x+y-1) : (x-y+1) : (-x+y+1) = a : b : c$; $x, y = ?$ (ohne Diskussion)

Zu 79–84: Mit Hilfe einer geeigneten Substitution¹ zu lösen.

- 79 a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 17$ b) $\frac{3}{x} + \frac{8}{y} = \frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{x} - \frac{1}{4y} = 5$
 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1$ $\frac{15}{x} - \frac{4}{y} = \frac{1}{3}$ $\frac{2}{3x} + \frac{1}{y} = 8$
- 80 a) $x^{-1} + y^{-1} = 2^{-1}$ b) $6x^{-1} - 4y^{-1} = 3$ c) $2x^{-1} + 9y^{-1} = 4$
 $x^{-1} - y^{-1} = 4^{-1}$ $9x^{-1} - 7y^{-1} = 4$ $4x^{-1} - 5y^{-1} = 3^{-1}$
- 81 a) $\frac{3}{x} - \frac{7}{y} = 5$ b) $3\sqrt{x} - 7\sqrt{y} = 5$ c) $3xy - 7y = 5$
 $\frac{5}{x} + \frac{3}{y} = 12$ $5\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 12$ $5xy + 3y = 12$
- d) $3x^2 - 7y^2 = 5$ e) $3x^{-2} - 7y^{-2} = 5$ f) $3x - \frac{7y}{x} = 5$
 $5x^2 + 3y^2 = 12$ $5x^{-2} + 3y^{-2} = 12$ $5x + \frac{3y}{x} = 12$
- 82 a) $\frac{8}{x} - \frac{9}{y} = \frac{11}{15}$ b) $\frac{8}{x+4} - \frac{9}{2y+1} = \frac{11}{15}$
 $\frac{6}{x} - \frac{5}{y} = \frac{2}{3}$ $\frac{6}{x+4} - \frac{5}{2y+1} = \frac{2}{3}$
- c) $\frac{8}{x-7} - \frac{9}{2x-y} = \frac{11}{15}$ d) $\frac{8}{x-y} - \frac{9}{x+y} = \frac{11}{15}$
 $\frac{6}{x-7} - \frac{5}{2x-y} = \frac{2}{3}$ $\frac{6}{x-y} - \frac{5}{x+y} = \frac{2}{3}$
- 83 a) $\frac{4}{2x-y} - \frac{5}{x-2y} = 6$ b) $x+y + \frac{x+y}{x-y} = 45$
 $\frac{8}{2x-y} - \frac{7}{x-2y} = 9$ $x+y - \frac{x+y}{x-y} = 15$
- 84 a) $\frac{x}{y-8} + \frac{y}{x-4} = 10$ b) $\frac{7x}{x-y} + 3x + 3y = 75$
 $\frac{x}{y-8} - \frac{y}{x-4} = 4$ $\frac{9x}{x-y} - 4x - 4y = 10$

¹ Lat. substituere "an die Stelle setzen".

- 85 a) $x^2 - y^2 = 1000$ b) $x^2 - y^2 = 2$ c) $x^2 - y^2 = a$
 $x - y = 10$ $x + y = 6$ $x - y = 1$
- 86 a) $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 10$ b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$ c) $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{2}$
 $x - y = 400$ $x - y = 6$ $x - y = 22$

9.2 Textaufgaben

Die Aufgaben dieses Abschnitts sind mit Hilfe von zwei Lösungsvariablen zu lösen.

- 87 Die Summe zweier gesuchter Zahlen ist zehnmal so gross wie ihre Differenz, die Summe ihrer reziproken Werte aber zehnmal so gross wie das Produkt ihrer reziproken Werte.
- 88 Vergrössert man den Zähler eines Bruches um 1, so erhält der Bruch den Wert 0.8; den Wert 0.75 erhält er, wenn man stattdessen den Nenner um 1 vergrössert. Berechne den ursprünglichen Zähler und den ursprünglichen Nenner.
- 89 Addiert man zu Zähler und Nenner eines Bruches je 3, so erhält er den Wert 0.3; subtrahiert man stattdessen von Zähler und Nenner je 2, so erhält er den Wert 0.2. Berechne den ursprünglichen Zähler und den ursprünglichen Nenner.
- 90 Dividiert man die grössere von zwei gesuchten natürlichen Zahlen durch die kleinere, so erhält man 3, Rest 3. Addiert man stattdessen zur kleineren Zahl 100 und dividiert diese Summe durch die andere Zahl, so erhält man wieder 3, Rest 3.
- 91 Zwei Ziffern bilden eine natürliche Zahl, die viermal so gross ist wie ihre Quersumme und um 9 kleiner als ihre Spiegelzahl. Bestimme die beiden Ziffern.
- 92 Dividiert man eine zweistellige natürliche Zahl durch ihre Quersumme, so erhält man 6, Rest 5. Dividiert man aber ihre Spiegelzahl durch die Quersumme, so erhält man 4, Rest 3. Wie heisst die Zahl?
- 93 Vor 5 Jahren war der Vater 5-mal so alt wie der Sohn. In 3 Jahren wird er 3-mal so alt sein wie der Sohn. Wie alt sind die beiden jetzt?
- 94 Marie ist jetzt 24 Jahre alt, doppelt so alt wie Anna war, als Marie so alt war, wie Anna jetzt ist. Wie alt ist Anna jetzt und wann war Marie gerade so alt?
- 95 Adam hat doppelt so viele Brüder wie Schwestern. Seine Schwester Eva hat dreimal so viele Brüder wie Schwestern. Wie viele Kinder haben die Eltern von Adam und Eva?

- 96 *A* sagt zu *B*: “Gib mir drei Viertel deines Geldes, so habe ich gerade 100 Franken.” “Nein”, sagt *B* zu *A*, “gib du mir nur die Hälfte deines Geldes, so habe ich 100 Franken.” Wie viel hat jeder?
- 97 In einer Kasse sind 75 Franken in lauter Zweifränkern und Fünflibern. Ersetzt man jeden Zweifränker durch eine Zehnernote und zugleich jeden Fünfliber durch eine Zwanziger-note, so ergibt sich dieselbe Wertzunahme, wie wenn man die Anzahl der Fünfliber auf 60 erhöht. Wie viele Münzen von jeder Sorte sind am Anfang in der Kasse?
- 98 An einer Tombola kostet ein blaues Los Fr. 3.–, ein rotes, mit der 4fachen Gewinnchance, Fr. 10.–. Am Nachmittag werden für diese Lose Fr. 278.– eingenommen. Am Abend werden 51 blaue Lose weniger verkauft, dafür aber 49 mehr von den roten. Damit ergaben sich an diesem Tag aus der Tombola Einnahmen von Fr. 893.–. Wie viele rote und blaue Lose wurden am Nachmittag verkauft?
- 99 Bestimme die Parameter a, b so, dass 2 und 3 die angegebene Gleichung erfüllen.
a) $ax^2 + bx = 1$ b) $ax + bx^{-1} = 1$ c) $ax^{-1} + bx^{-2} = x$
- 100 In der Gleichung $y = ax + b$ sind die Parameter a und b so zu bestimmen, dass die angegebenen Zahlenpaare (x, y) die Gleichung erfüllen.
a) $(7, 9)$, $(4, 5)$ b) $(6, 2)$, $(10, 10)$ c) $(-2, 3.4)$, $(1.6, -2)$

Prozente, Mischungen

- 101 Ein Kapital wird zu 4 % verzinst, ein anderes zu 5 %. Die Summe der beiden Jahreszinsen beträgt Fr. 1410.–. Wird nach einem Jahr jeder Zins zu seinem Kapital geschlagen, so werden die beiden Kapitalien gleich gross. Wie gross waren sie am Anfang?
- 102 Frau Huber muss zwei Hypotheken verzinsen, eine zu 6 % und eine zu $6\frac{1}{2}$ %. Sie muss dafür pro Jahr Fr. 18 560.– aufbringen. Dieser Betrag wäre um Fr. 1520.– kleiner, wenn die Zinssätze auf $5\frac{1}{2}$ % bzw. 6 % sinken würden. Wie gross sind die beiden Hypotheken?
- 103 Herr Meier hat ein Kapital in zwei Posten angelegt, einen zu 4 % und einen zu 5 %. Nach seiner Rechnung beträgt die Summe der Jahreszinsen Fr. 2480.–. Das sind aber Fr. 80.– zu wenig; er hat nämlich die Zinssätze verwechselt. Wie gross sind die beiden Posten?
- 104 Der Reisefonds einer Schule hatte früher sein Kapital in zwei Posten zu 4 % und 3 % angelegt, woraus sich ein mittlerer Zinssatz von 3.6 % ergab. Als beide Zinssätze um 0.5 % grösser wurden, erhöhte sich der jährliche Zinsertrag des gleich gebliebenen Fonds um Fr. 750.–. Berechne die Posten.
- 105 Zwei Pralinésorten kosten Fr. 14.40 und Fr. 18.40 pro 250 g. Wie viele Gramm jeder Sorte sollte es in einem 250 g-Päcklein haben, das Fr. 17.– kostet?

- 106 Ein Kaufmann mischt zwei Kaffeesorten. Nimmt er von der billigen Sorte doppelt so viel wie von der teuren, so kommt das Kilo auf a Franken zu stehen, im umgekehrten Fall auf b Franken. Berechne die Kilopreise der beiden Sorten.
a) $a = 17.10, b = 18.50$ b) allgemein
- 107 Wenn man 90 g einer Goldsorte mit 60 g einer zweiten Sorte legiert, so erhält man Gold mit der Feinheit 805. Legiert man aber 20 g der ersten Sorte mit 100 g der zweiten, so hat die Legierung die Feinheit 675. Welche Feinheit besitzt jede Sorte?
(Feinheit f : auf 1000 Gewichtsteile kommen f Gewichtsteile Feingold.)
- 108 Ein Goldschmied besitzt zwei Sorten Gold. Legiert er 50 g der ersten Sorte mit 100 g der zweiten, so erhält er 14-karätiges Gold. Wenn er zu dieser Legierung noch 150 g der ersten Sorte hinzufügt, so wird die neue Legierung 16-karätig. Welchen Goldgehalt besitzt jede Sorte?
(k -karätig: auf 24 Gewichtsteile kommen k Gewichtsteile Feingold.)
- 109 Messing ist eine Legierung von Kupfer (8.9 g/cm^3) und Zink (7.2 g/cm^3). Wie viele Gramm Kupfer und Zink sind in 100 g Messing mit der Dichte 8.2 g/cm^3 enthalten, wenn die Volumenverminderung beim Legieren nicht berücksichtigt wird?
(Runde das Ergebnis auf ganze Gramm.)
- 110 Werden 10 l einer Spiritussorte mit 16 l einer andern gemischt und zu der Mischung noch 7.4 l Wasser gegossen, so erhält man 50%igen Spiritus. Man erhält denselben 50%igen Spiritus durch Mischen von 6 l der ersten Sorte mit 10 l der zweiten und Hinzugießen von 4.6 l Wasser. Wie viel %ig sind die vorhandenen Spiritussorten?
- 111 Es sollen a Liter 55%iger Spiritus hergestellt werden, wobei eine 35%ige und eine 85%ige Sorte zur Verfügung stehen. Wie viele Liter von jeder Sorte muss man nehmen?
- 112 Man mischt eine 50%ige Spiritussorte mit einer 90%igen und erhält eine 80%ige. Würde man von der ersten Sorte 2 l weniger nehmen, von der zweiten aber 2 l mehr, so müsste man noch 1 l Wasser beimischen, um wieder eine 80%ige zu erhalten. Wie viele Liter hat man von jeder Sorte genommen?

Bewegungen, Leistungen

- 113 Ein Autofahrer legt eine 62 km lange Strecke in einer Stunde zurück. Auf dem Autobahnstück kann er eine mittlere Geschwindigkeit von 90 km/h einhalten, auf dem Rest der Strecke eine solche von 50 km/h. Wie lang ist das Autobahnstück und wie lang der Rest der Strecke?

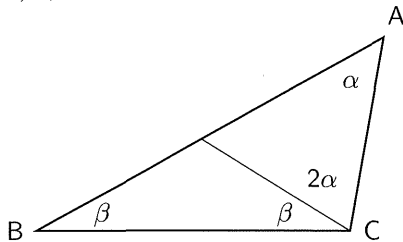
- 114 Herr Merz fährt in 48 min auf einer Autostrasse von A nach D und in 55 min zurück. Das Teilstück BC ist in beiden Richtungen nur mit 40 km/h befahrbar, im Übrigen kann Herr Merz auf der Hin- und der Rückfahrt eine mittlere Geschwindigkeit von 90 km/h bzw. 70 km/h einhalten. Wie lang sind AD und BC ? (Ergebnis auf ganze km genau)
- 115 Die Fahrzeuge A , B und C legen dieselbe Strecke zurück. B ist um 6 km/h schneller und braucht 11 min weniger als A . C ist um 4 km/h langsamer und braucht 9 min mehr als A . Berechne die Fahrzeit und die mittlere Geschwindigkeit von A .
- 116* Ein Langläufer benötigt 36 min für eine Loipe, die von A aus stark steigend nach B führt, dann in einer horizontalen Schleife nach B zurück und schliesslich wieder hinunter nach A . Seine mittleren Geschwindigkeiten auf den drei Teilstücken messen 12, 15 und 20 km/h. Wie lang ist die Loipe?
- 117 Ein Schiff benötigt für eine 25 km lange Strecke stromabwärts 50 min, stromaufwärts 90 min. Berechne die mittlere Geschwindigkeit des Schiffes gegenüber dem Wasser sowie die mittlere Strömungsgeschwindigkeit des Wassers. (Ergebnis auf ganze km genau)
- 118 Von zwei Eisenbahnstationen, deren Entfernung d Meter beträgt, gehen gleichzeitig zwei Züge ab, jeder mit konstanter Geschwindigkeit. Wenn sie einander entgegenfahren, treffen sie sich nach a Minuten, wenn sie aber in derselben Richtung fahren, nach b Minuten. Wie viele Meter legt jeder Zug pro Minute zurück?
a) $a = 4$, $b = 20$, $d = 8600$ b) allgemein
- 119 Zwei Objekte bewegen sich mit konstanten Geschwindigkeiten auf einem Kreis. Bewegen sie sich im gleichen Umlaufsinn, so treffen sie sich nach je a Sekunden; bewegen sie sich aber einander entgegen, so treffen sie sich nach je b Sekunden. Wie viele Winkelgrad legt jeder pro Sekunde zurück?
a) $a = 15$, $b = 9$ b) allgemein
- 120 Zwei Radfahrer fahren auf einer 400 m langen Rennbahn mit praktisch konstanten Geschwindigkeiten. Der zweite startet 10 Sekunden nach dem ersten, 45 Sekunden später holt er ihn zum ersten Mal ein und weitere 225 Sekunden später zum zweiten Mal. Wie schnell fahren die beiden?
- 121 Eine Autokolonne auf einer Autobahn wird von einem Helikopter zweimal überflogen. Bei einer mittleren Geschwindigkeit von 140 km/h benötigt der Heli 7.5 min, um die Kolonne in Fahrtrichtung zu überfliegen, und 6.5 min in der Gegenrichtung. Wie lang ist die Kolonne und mit welcher mittleren Geschwindigkeit ist sie unterwegs?
- 122 Zwei Zuleitungen füllen zusammen ein Gefäss, wenn die erste 6 h lang geöffnet ist und die zweite 4 h lang. Verwechselt man die Öffnungszeiten, so läuft ein Sechstel des Gefässinhaltes über. Welchen Bruchteil des Gefässinhaltes liefert jede Leitung pro Stunde? In wie vielen Stunden wird das Gefäss durch jede Leitung einzeln gefüllt, in wie vielen durch beide zusammen?

Geometrie

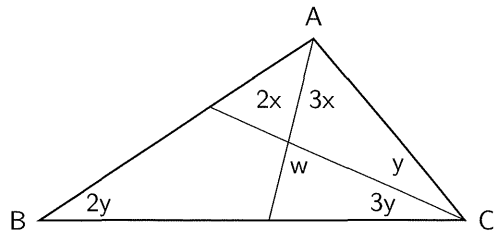
- 123** Der Umfang eines Rechtecks misst 80 cm. Vergrößert man seine Länge um ΔL und zugleich seine Breite um ΔB cm, so wächst sein Flächeninhalt um 500 cm^2 . Berechne die ursprüngliche Länge und Breite.

a) $\Delta L = 8 \text{ cm}$, $\Delta B = 12 \text{ cm}$ b) $\Delta L = \Delta B = 10 \text{ cm}$

- 124** a) $\gamma = 111^\circ$; $\alpha = ?$ $\beta = ?$



- b) $w = 69^\circ$; $x = ?$ $y = ?$



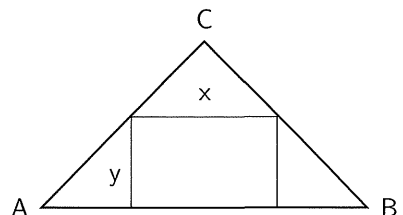
- 125** Vergrößert man die Länge eines Rechtecks um 2 cm und verkleinert zugleich die Breite um 3 cm, so bleibt die Diagonale gleich lang. Vergrößert man stattdessen die Länge um 4 cm, so muss man die Breite um 7 cm verkleinern, wenn die Diagonale wieder gleich lang bleiben soll. Wie lang und wie breit ist das ursprüngliche Rechteck?

- 126** Eine Leiter ist an eine vertikale Wand gestellt. Schiebt man ihren Fuss auf dem horizontalen Boden um 1 m gegen die Wand, so rutscht das andere Ende der Leiter um 4 dm nach oben. Zieht man stattdessen den Fuss um 1 m von der Wand weg, so rutscht das andere Ende um 6 dm nach unten. Wie weit ist anfänglich der Leiterfuss von der Wand entfernt und das obere Leiterende vom Boden? Berechne ferner die Länge der Leiter auf cm genau.

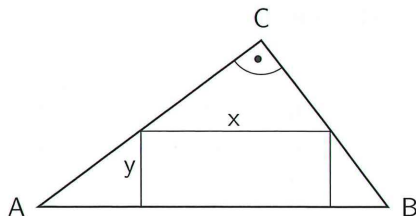
- 127** Wenn man die Grundkante einer quadratischen Säule (Quader mit quadratischer Grundfläche) um 1 cm verkürzt und die Höhe dafür um 1 cm verlängert, bleibt die Körperdiagonale gleich lang. Wenn man aber stattdessen die Grundkante um 1 cm verlängert, muss man die Höhe um 3 cm verkürzen, damit die Körperdiagonale gleich lang bleibt. Wie lang sind die Kanten der ursprünglichen Säule?

- 128** Von den Kantenlängen a, b, c eines Quaders kennt man $a = 3 \text{ cm}$. Verlängert man b um 2 cm und verkürzt zugleich c um 1 cm, so bleibt die Körperdiagonale gleich lang, während die Oberfläche um 18 cm^2 grösser wird. Berechne b und c .

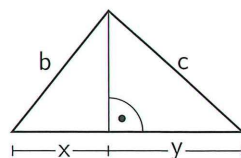
- 129** Im Dreieck ABC ist $a = b = 41 \text{ cm}$, $c = 18 \text{ cm}$. Der Umfang des einbeschriebenen Rechtecks soll 69 cm messen. $x = ?$ $y = ?$



- 130 Im rechtwinkligen Dreieck ABC ist $a : b = 3 : 4$. Der Umfang des einbeschriebenen Rechtecks soll halb so gross sein wie der des Dreiecks. $x : y = ?$



- 131 Berechne aus den Seiten a, b, c eines Dreiecks die Projektionen x, y (vgl. Figur) und die Dreiecksfläche A .
- a) $a = 12, b = 13, c = 11$
 b) $a = 21, b = 17, c = 10$



Bemerkung: Die allgemeine Durchführung dieser Aufgabe führt auf die Formel von Heron¹ für den Flächeninhalt eines Dreiecks. (Vgl. Ergebnisteil)

- 132 In welchen Dreiecken ist ein Winkel gleich gross wie die Differenz der beiden andern?

9.3 Systeme mit drei und mehr Lösungsvariablen

Ein System von n linearen Gleichungen mit n Lösungsvariablen hat *im Normalfall genau eine Lösung*; in jedem andern Fall (d. h. in jedem Sonderfall) hat es entweder keine Lösung oder unendlich viele.

Zu 133–149: n Gleichungen mit n Lösungsvariablen (ohne Sonderfälle).

- 133 a) $8x - 7y + 10z = 9$
 $5y - 4z = 16$
 $6z = 21$
- b) $13x = 156$
 $5x + 6y = 0$
 $9x + 11y + 2z = 36$
- c) $6w = 27$
 $7w - 3x = 24$
 $5w + 9x - 8y = 29$
 $4w - 2x + y + 2z = 25$
- d) $w + x + y + z = 12$
 $3x + 3y - 2z = -6$
 $-4y + 9z = 10$
 $\frac{8}{3}z = 16$
- 134 a) $2x + 4y - 7z = 0$
 $3y = 87$
 $6x - 5y = 11$
- b) $w - x + y - z = 0.5$
 $8x - 9z = 1$
 $2.5z = 1.5$
 $-x + 2y + 3z = 2$

¹ Heron von Alexandrien (um 100 n. Chr.).

- 135** a) $2x - 3y + 4z = 6$
 $3x + 8y - 5z = 10$
 $6z = 54$ b) $16y = 8$
 $8x - 4y - 3z = 7$
 $5x - 7y + 2z = 6$
- 136** a) $5x = 4.5$
 $x + 2y - 3z = 0$
 $4x - 5y + 6z = 0$ b) $x + y + z = 8$
 $3x + 5y + 7z = 6$
 $2z = 4$
- 137** a) $11x - 9y = 30$
 $8x - 7y = 20$
 $x - y + z = 10$ b) $x + y + z = 8$
 $\frac{1}{5}y + 0.5z = 8$
 $\frac{1}{3}y + 0.3z = 8$
- 138** a) $4x - 3z = 11$
 $x - 6y + 8z = 4$
 $7x - 5z = 21$ b) $5x - 8y = 1$
 $2x - 3y = 1$
 $4x + 7y - 10z = 1$
- 139** a) $9x + 7y = 13$
 $2x - 3y + 4z = 48$
 $5x - 8y + 6z = 85$ b) $x + y + z = 33$
 $3x - 8y + 7z = 26$
 $5y - 3z = 19$
- 140** a) $9x - 6y + 7z = 4$
 $4x + 3y - 5z = 9$
 $2x + 3z = 16$ b) $4x + 7y = 5$
 $x + 8y - 4z = 0$
 $8x - y + 7z = 0$
- 141** a) $3x + 4y + 2z = 9$
 $4x + 3y = 8$
 $2y + 3z = 7$ b) $7x + 8y + 9z = 6$
 $5x + 4y = -3$
 $4x - 3z = 11$
- 142** a) $4x + y = 25$
 $x + 2z = 30$
 $3y + z = 40$ b) $4x + 7y = 10$
 $3x + 8z = 13$
 $3y + 5z = 16$
- 143** a) $x + y + z = 60$
 $x - 3y + 2z = -4$
 $2x + 5y - 5z = 68$ b) $7x - 6y + 5z = 18$
 $5x + 3y - 4z = 28$
 $8x + 2y + 3z = 26$
- c) $2x + 3y - 4z = -5$
 $3x - 5y + 2z = 4$
 $4x + y - 2z = 5$ d) $3x + 4y - 16z = 0$
 $5x - 8y + 10z = 0$
 $2x + 6y + 7z = 52$
- 144** a) $x - 2y + 3z = 6$
 $8x - 3y + 4z = 6$
 $9x + 5y - 7z = 6$ b) $2x - 4y + 5z = 60$
 $3x + 9y + 2z = 65$
 $6x - 7y + 3z = 70$

$$145 \quad a) \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 6$$

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} - \frac{z}{10} = 3$$

$$x - \frac{y}{6} + \frac{z}{2} = 8$$

$$b) \quad \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y - z = \frac{1}{8}$$

$$x - \frac{3}{2}y + \frac{4}{3}z = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y - \frac{2}{3}z = \frac{1}{6}$$

$$146 \quad a) \quad \frac{6}{x} - \frac{5}{y} - \frac{6}{z} = 0$$

$$\frac{4}{x} - \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 1$$

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{9}{z} = 2$$

$$b) \quad 6x - 5y^{-1} - 6z^{-2} = 0$$

$$4x - 2y^{-1} + 3z^{-2} = 1$$

$$2x + 3y^{-1} + 9z^{-2} = 2$$

$$c) \quad 6xyz - 5yz - 6z = 0$$

$$4xyz - 2yz + 3z = 1$$

$$2xyz + 3yz + 9z = 2$$

$$d) \quad 6(x+y)^{-1} - 5(x+z)^{-1} - 6(y+z)^{-1} = 0$$

$$4(x+y)^{-1} - 2(x+z)^{-1} + 3(y+z)^{-1} = 1$$

$$2(x+y)^{-1} + 3(x+z)^{-1} + 9(y+z)^{-1} = 2$$

$$147 \quad a) \quad w + x - y + z = 16$$

$$3w - 2x + 9y - z = 11$$

$$4w - 3x + 6y + 2z = 13$$

$$6w - 4x + 2y + 3z = 10$$

$$b) \quad -w + 3x - 2y + z = 17$$

$$w + 2x - 3y - 4z = 10$$

$$3w - x + 4y + 2z = 21$$

$$2w - 5x + y + 3z = 15$$

$$148 \quad a) \quad v - w + x - y + z = 0$$

$$2v - w + 3x + y - 3z = 0$$

$$v + 4w + 5x - 3y - 3z = 0$$

$$4v - 2w - x - 2y + 3z = 0$$

$$3v + w - 2x - 3y + 3z = 1$$

$$b) \quad v + w + x + 3y + 2z = 0$$

$$2v - 4w - 5x - 4y - 2z = 1$$

$$3v - w + 2x + y - z = 2$$

$$4v - 5w - 4x + y + z = 3$$

$$5v - 6w - 4x + 4y + 3z = 4$$

$$149 \quad a) \quad v + w = 1$$

$$w + x = 2$$

$$x + y = 3$$

$$y + z = 4$$

$$z + v = 5$$

$$b) \quad v + 2w = 11$$

$$w + 2x = 22$$

$$x + 2y = 33$$

$$y + 2z = 44$$

$$z + 2v = 55$$

Zu 150–152: a, b, c sind *Parameter*, u, v, x, y, z Lösungsvariablen. Löse das System unter Annahme des Normalfalles.

$$150 \quad a) \quad x + y + z = a + b + c$$

$$x + y = 2c$$

$$y + z = 2a$$

$$b) \quad x + y + z = 4a + 6b$$

$$2x + 3y - z = 3a + 5b$$

$$4y + 3z = 10a + 17b$$

$$151 \quad a) \quad x + y + z = 2a + 2b + c$$

$$2x - y - z = a + b - c$$

$$x + 2y - 3z = 3a - 2b - 8c$$

$$b) \quad u + x + y + z = 3a + 4b - 3c$$

$$2x - 3y + 4z = 4a + 10b + 16c$$

$$y - z = -a - b - 5c$$

$$z = a + b + c$$

- 152** a) $u : y = 4 : 5$ b) $u : v = 8 : 7$
 $x : z = 7 : 9$ $x : y = 3 : 4$
 $u + x - y = -2a + 7b$ $y : z = 5 : 6$
 $x + y - z = 10a - 2b$ $2v + 3x = 56a + 45b$
 $4az = 3bu$

Zu 153–158: 2 Gleichungen mit 3 Lösungsvariablen.

- 153** Bestimme die Lösungen mit $z = 0$, $z = 8$, $z = -4.5$ und gib Formeln zur allgemeinen Berechnung von x und y aus z an.
a) $x + 2y + 3z = 4$ b) $7x - 6y + 2z = 9$
 $2x + 3y + 4z = 5$ $5y - 4z = 3$
- 154** Bestimme die Lösungen mit $y = 7$, $y = \frac{1}{3}$, $y = -2$ und gib Formeln zur allgemeinen Berechnung von x und z aus y an.
a) $2x - 5y = 11$ b) $-8x + 3y + 2z = 6$
 $3x + y - 2z = 0$ $5x + y - 7z = 2$
- 155** Bestimme die Lösungen mit $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$ und gib Formeln zur allgemeinen Berechnung von y und z aus x an.
a) $4x + 2y + 3z = 44$ b) $2x + 2y + 3z = 13$
 $x + y + 2z = 25$ $3y + 4z = 17$
- 156** Bestimme in den Gleichungssystemen von Nr. 155 die Lösungen, in denen x, y, z lauter natürliche Zahlen sind.
- 157** Berechne x und y (aus z), x und z (aus y) sowie y und z (aus x).
a) $5x - 6y + 2z = 0$ b) $2x + 3y = 0$
 $3x + 2y - 3z = 0$ $8x - 9y + 7z = 0$
- 158** Bestimme in den Gleichungssystemen von Nr. 157 das Verhältnis $x : y : z$ in möglichst einfachen ganzen Zahlen.

Zu 159, 160: Sonderfälle bei 3 Gleichungen mit 3 Lösungsvariablen.

- 159** Löse das System. Im Fall unendlich vieler Lösungen sind Formeln zur Berechnung von x und y aus z anzugeben.
- a) $4x - y - 2z = 9$ b) $2x - 3y + z = 7$
 $3x + 2y - 3z = 8$ $x - 4y - 2z = 1$
 $x + 8y - 5z = 22$ $3x - 2y + 4z = 13$
- c) $-6x + 5y - 9z = 1$ d) $x + y + 2z = 4$
 $4x - 3y + 5z = 1$ $x + 2y + z = 4$
 $x + 2y - 7z = 14$ $2x + y + z = 4$

- 160** Bestimme die Werte des Parameters p , für welche das System erfüllbar ist, und löse es für jeden solchen p -Wert. Im Fall unendlich vieler Lösungen sind Formeln zur Berechnung von x und y aus z anzugeben.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & 2x - y + 3z = 4 \\ & x + 2y - z = 7 \\ & 3x + y + 2z = p \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{b)} & 5x + 4y + 6z = 19 \\ & 3x + 2y + 4z = 13 \\ & 7x + 4y + 10z = p \end{array}$$

- 161** Das allgemeine System von drei linearen Gleichungen mit drei Lösungsvariablen:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

Um seine Auflösung anzugeben, verwenden wir die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 &= N \\ d_1b_2c_3 - d_1b_3c_2 - d_2b_1c_3 + d_2b_3c_1 + d_3b_1c_2 - d_3b_2c_1 &= X \\ a_1d_2c_3 - a_1d_3c_2 - a_2d_1c_3 + a_2d_3c_1 + a_3d_1c_2 - a_3d_2c_1 &= Y \\ a_1b_2d_3 - a_1b_3d_2 - a_2b_1d_3 + a_2b_3d_1 + a_3b_1d_2 - a_3b_2d_1 &= Z. \end{aligned}$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt:

$$\begin{aligned} N \neq 0 &\Rightarrow \text{das System hat genau eine Lösung (Normalfall): } (x, y, z) = \left(\frac{X}{N}, \frac{Y}{N}, \frac{Z}{N}\right); \\ N = 0 &\Rightarrow \text{das System hat keine Lösung oder unendlich viele (Sonderfälle).} \end{aligned}$$

Löse mit Hilfe dieses Resultates z. B. die Systeme von Nr. 143.

- 162** Definition der *Determinante*¹ von neun quadratisch angeordneten Zahlen:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

In den Bezeichnungen von Nr. 161 ist also

$$N = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$X = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad Y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad Z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Berechne die Determinanten.

$$\text{a)} \quad \begin{vmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{b)} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \\ 7 & 8 & -9 \end{vmatrix} \quad \text{c)} \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

¹ Lat. determinare "bestimmen".

Textaufgaben

- 163** Eine 3-stellige natürliche Zahl hat die Quersumme 18. Vertauscht man die erste Ziffer (von links) mit der zweiten, so wächst die Zahl um 180; vertauscht man stattdessen die zweite Ziffer mit der dritten, so wächst die Zahl um 18. Wie heisst die Zahl?
- 164** Das arithmetische Mittel zweier 3-stelliger natürlicher Zahlen, die sich nur in der Reihenfolge der zwei ersten Ziffern (von links) unterscheiden, beträgt 555. Teilt man jede der beiden Zahlen durch ihre Quersumme, so erhält man 49 und 25. Um welche beiden Zahlen handelt es sich?
- 165** Die Quersumme einer 3-stelligen natürlichen Zahl ist 7-mal so gross wie deren mittlere Ziffer. Streicht man die Einerziffer, so bleibt eine 2-stellige Zahl, die 7-mal so gross ist wie ihre Quersumme. Streicht man stattdessen die Hunderterziffer, so bleibt eine 2-stellige Zahl, die 7-mal so gross ist wie die gestrichene Ziffer. Bestimme diese Zahl.
- 166** Eine Bergbahn verlangt für Berg- und Talfahrt zusammen Fr. 30.–, für die Bergfahrt allein Fr. 22.50 und für die Talfahrt allein Fr. 15.–. An einem Sonntag fahren im Ganzen 680 Zahlende hinauf und 520 hinab. Es wurden Fr. 19 650.– eingenommen. Wie viele Billette jeder Art wurden gelöst?

Zu 167, 168: Bestimme die Parameter a, b, c so, dass die Gleichung von den angegebenen Lösungen erfüllt wird.

- 167** a) $ax^2 + bx + c = x^{-1}$, Lösungen: 1, 2, 3
 b) $ax + by = c + xy$, Lösungen: (1, 1), (2, 3), (4, 5)
 c) $z = ax + by + c$, Lösungen: (9, 8, 5), (-4, -4, -1), (6, 5, 2)
- 168** a) $ax^3 + bx^2 + cx = 24$, Lösungen: 2, -2, 3
 b) $y = ax^2 + bx + c$, Lösungen: (-2, 1), (2, 3), (4, -8)
 c) $ax^{-1} + by^{-1} + cz^{-1} = 1$, Lösungen: (2, 3, 4), $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$, (5, 5, 5)
- 169** Ein Kapital von Fr. 330 740.– ist in drei Posten zu 4%, 5% und 6% angelegt. Schlägt man nach einem Jahr die Zinsen dazu, so werden alle Posten gleich gross. Wie gross waren die Posten am Anfang?
- 170** Ein Wasserbehälter kann durch drei Zuleitungen gefüllt werden, und zwar durch A und B zusammen in c, durch A und C zusammen in b und durch B und C zusammen in a Minuten. In wie vielen Minuten wird der Behälter durch jede Leitung einzeln gefüllt, in wie vielen durch alle drei gemeinsam?
- a) $a = 36, b = 45, c = 60$ b) allgemein

- 171** Ein Radfahrer hat eine Geschwindigkeit von 25 km/h auf ebenem Gelände, von 15 km/h bergaufwärts und von 30 km/h abwärts. Wie viel ebenen, ansteigenden und absteigenden Weg enthält unter diesen Voraussetzungen eine 100 km lange Strasse, wenn der Radfahrer 4 h 24 min braucht, um sie in der einen Richtung, und 4 h 36 min, um sie in der andern Richtung zu durchfahren?
- 172** Von einem Dreieck sind die Seitenlängen a, b, c gegeben. In welchen Abständen von den Ecken berührt der Inkreis die Seiten?
- 173** Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks bilden im gemeinsamen Schnittpunkt drei Winkel, die sich wie 4 : 5 : 6 verhalten. Berechne die Dreieckswinkel.
- 174** Berechne die Kanten a, b, c sowie die Körperdiagonale k eines Quaders aus den Flächendiagonalen
 a) 7 cm, 8 cm, 9 cm b) 39 cm, 40 cm, 41 cm c) $f_a(\perp a), f_b(\perp b), f_c(\perp c)$.
- 175** Ein Kind trägt eine Anzahl Fünf-, Zwei- und Einfrankenstücke lose in der Tasche. Es verliert von jeder Sorte ein Stück und besitzt dann wertmässig noch so viele Franken, als es am Anfang Geldstücke in der Tasche hatte. Wie viele Stücke jeder Sorte hatte es anfangs bei sich?
- 176*** A, B und C sind Mengen. $A \cap B$ hat 2, $A \cap C$ hat 3, $B \cap C$ hat 4 Elemente; $A \cup B$ hat 13, $A \cup C$ hat 15, $B \cup C$ hat 17 Elemente. Berechne die Anzahl der Elemente von A, B und C .